MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

C désignant le corps des complexes, on considère l'espace vectoriel complexe $V = \mathbf{C}^3$ muni de la base canonique $B = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

On définit l'application bilinéaire notée $< , >$, de $V \times V$ dans **C**, par :

$$< \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 , \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3 > = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' .$$

On dira qu'un vecteur x de V est *isotrope* si $< x, x > = 0$.

On définit d'autre part l'application bilinéaire notée $\wedge$, de $V \times V$ dans V, par :

$$(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) \wedge (\alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3) =$$
$$(\beta\gamma' - \gamma\beta') e_1 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma') e_2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha') e_3 .$$

On admettra les identités

$$< (x \wedge y), z > = \det_B (x, y, z)$$

et $$(x \wedge y) \wedge z = < x, z > y - < y, z > x .$$

On appelle $< , >$*-automorphisme de* V une application linéaire inversible u de V dans V telle que pour tous x et y de V on ait :

$$< u(x), u(y) > = < x, y > .$$

On appelle $\wedge$*-automorphisme de* V une application linéaire inversible u de V dans V telle que pour tous x et y de V on ait .

$$u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y) .$$

Il est conseillé de traiter complètement le I avant d'aborder le II.

Le début du III ne dépend pas du reste.

I

1° *a.* Montrer que $x \wedge y = 0$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

b. Soit x dans V. On pose $x^\perp = \{ y \mid y \in V \ ; \ < x, y > = 0 \}$. Montrer que si x est non nul, $x^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de V, et que $x^\perp = \{ x \wedge y \mid y \in V \}$.

Vérifier que si z_1 et z_2 sont dans $x^\perp$, $z_1 \wedge z_2$ est colinéaire à x.

2° Si x et y sont des éléments de V non colinéaires, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $x \wedge y$ soit colinéaire à x.

Peut-on avoir des vecteurs isotropes x et y non colinéaires, tels que $x \wedge y$ soit colinéaire à x ? ou tels que $< x, y > = 0$?

Si x et y sont isotropes et non colinéaires, quelles sont les combinaisons linéaires de x et de y qui sont isotropes ?

3° Soit x, y, z trois éléments non nuls de V tels que $x \wedge y = z$, $y \wedge z = x$ et $z \wedge x = y$.

Montrer que $< x, x > = < y, y > = < z, z > = 1$

et que $< x, y > = < y, z > = < z, x > = 0$.

En déduire qu'un $\wedge$-automorphisme u est également un $< , >$-automorphisme et que u est de déterminant 1.

4° Soit $x \in V$ tel que $< x, x > = 1$.

a. Montrer qu'il existe y dans $x^\perp$ tel que $< y, y > = 1$. On pose alors $z = x \wedge y$; vérifier que $y \wedge z = x$ et $z \wedge x = y$.

b. Montrer qu'il existe a_1 et a_2 dans $x^\perp$, non nuls, tels que $x \wedge a_1 = i a_1$ et $x \wedge a_2 = -i a_2$. En quel sens a_1 et a_2 sont-ils uniques?

II

Dans cette partie, on se propose de démontrer que si u est un $\wedge$-automorphisme, on peut trouver ζ dans **C** et v dans V tels que la condition (C) :

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \zeta^2 - < v, v > = 1 \\ \text{pour tout } x \text{ de } V, \\ \quad u(x) = (\zeta^2 + < v, v >) x - 2 < v, x > v + 2 i \zeta v \wedge x \end{cases}$$

soit vérifiée.

A. On suppose d'abord que *tous* les vecteurs propres de u sont isotropes. Soit a un vecteur propre de u fixé, correspondant à la valeur propre α.

1° *a.* Soit y tel que $a \wedge y$ soit non nul et colinéaire à a. Montrer qu'il existe β et γ complexes tels que $u(y) = \gamma a + \beta y$, et qu'on a $\alpha\beta = \alpha$.

b. Si $\alpha \neq 1$, montrer qu'il existe un vecteur propre y' pour la valeur propre 1, et que y' est non isotrope.

c. En déduire que u admet un seul sous-espace propre, de dimension 1, pour la valeur propre 1, qui est la seule valeur propre de u.

2° Trouver b et c tels que $\{a, b, c\}$ soit une base de V, avec $a \wedge b = a$ et $a \wedge c = b$.

Montrer que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que $< c, a > = 1$, que $\alpha_1 \alpha_3 = 2\alpha_2$ et $\alpha_1 = \alpha_3$.

3° Montrer qu'il existe v dans V tel que pour tout x de V on ait

$$u(x) = x - 2 < v, x > v + 2iv \wedge x .$$

(On pourra chercher le vecteur v sous la forme $v = \delta a$, $\delta \in \mathbf{C}$).

En conclure que la condition (C) est vérifiée pour u.

B. On suppose maintenant que u admet un vecteur propre *non isotrope* a pour la valeur propre α.

1° Montrer que l'on peut imposer $< a, a > = 1$, ce qui sera supposé par la suite. Trouver une base de V dans laquelle la matrice associée à u est

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \lambda \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Établir les égalités $\beta_1 \beta_2 = \alpha$ et $\alpha^2 = 1$.

2° Si $\alpha = 1$, montrer que u est diagonalisable. En déduire que (C) est vérifiée pour u. (On pourra chercher le v de la condition (C) sous la forme $v = \delta a$, $\delta \in \mathbf{C}$.)

3° Si $\alpha = -1$, montrer que $\alpha\beta_1 = \beta_2$ et que u est diagonalisable. En déduire que 1 est valeur propre de u. Que peut-on dire des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 ? Montrer que pour u, la condition (C) est encore vérifiée.

III

On considère l'espace vectoriel complexe $A = \mathbf{C}^4$, que l'on écrit $A = \mathbf{C} \times V$. On notera $x = (\alpha, v)$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$ et $v \in V$ les éléments de A.

Sur A on définit une loi de composition par

$$(\alpha, v) \cdot (\alpha', v') = (\alpha\alpha' + < v, v' >, \alpha v' + \alpha' v + i v \wedge v') .$$

On admettra sans vérification que cette loi est associative, et que A est muni par l'addition vectorielle et par cette loi d'une structure d'anneau.

1° Montrer que l'anneau A est unitaire. On notera $\mathbf{1}$ l'élément neutre du produit. Si $x = (\alpha, v)$ est dans A, on pose $\hat{x} = (\alpha, -v)$. Vérifier que pour tous x et y dans A, on a $\widehat{x.y} = \hat{y}.\hat{x}$, $\hat{\hat{x}} = x$, et $\hat{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$. Calculer $x.\hat{x}$.

Quels sont les éléments inversibles de A ? Montrer que tout élément de A est inversible, ou somme de deux éléments inversibles.

2° On appelle A-*automorphisme* une application linéaire φ de A dans A telle que $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et $\varphi(x.y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ quels que soient x et y de A.

Montrer que $\varphi(\hat{x}) = \widehat{\varphi(x)}$. En déduire qu'il existe une application linéaire u de V dans V telle que pour tout (α, v) de A on ait

$$\varphi((\alpha, v)) = (\alpha, u(v)) .$$

Montrer que u et φ sont bijectives; préciser la nature de l'endomorphisme u.

3° Soit $x_0 = (\zeta_0, v_0)$ un élément de A tel que $x_0 . \hat{x}_0 = \mathbf{1}$. Montrer que l'application $x \longmapsto x_0 . x . x_0^{-1}$ est un A-*automorphisme* (appelé automorphisme interne associé à x_0).

4° Montrer, en utilisant la propriété (C) du II des $\wedge$-automorphismes de V, que les A-automorphismes sont exactement les automorphismes internes.

Montrer que toute application linéaire u de V dans V qui a la propriété (C) du II est un $\wedge$-automorphisme.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail